グレブナ変形による微分方程式系の解析 (数学解析の計算機上での理論的展開とその遂行可能性)

高山, 信毅

数理解析研究所講究録 1286 巻 2002 年 9-16

グレブナ変形による微分方程式系の解析

神戸大学 理学部 高山信毅 (Nobuki Takayama)
Department of Mathematics, Kobe University

微分方程式系を解くということは数学の基本的な問題の一つである．たとえば大学初年次の数学で次のような微分方程式を解く方法を習う．

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+a_1\frac{d}{dx}+a_0\right)f=0, \quad a_1, a_0 \in \mathbf{C}$$

判別式 $a_1^2-4a_0\neq 0$ ならこの方程式は次のような二つの解を持つ．

$$f=\exp(\alpha x) \quad \text{および} \quad f=\exp(\beta x)$$

ここで α, β は, 二次方程式 $s^2+a_1s+a_0=0$ の相異なる 2 根である．判別式が消えるときは, α を重根とすると, $\exp(\alpha x)$ と $x\exp(\alpha x)$ が解となる．解の全体は $\mathbf{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間となり上の解はその基底である．

一般に多項式係数の r 階の微分方程式

$$\left(a_r(x)\frac{d^d}{dx^r}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right)f=0,$$

を考えよう．この方程式の解空間は $\mathbf{C}$ 上の r 次元のベクトル空間である．微分 Galois 理論によれば, 一般の方程式は exp のような初等関数で解ける訳ではない．今, 解空間という用語を用いたが, 実は解空間の定義をしないといまの言明は正確ではない．代数方程式系を考えるとき, 実数の範囲で解くか, 複素数の範囲で解くかはっきりさせないといけないのと同じことである．

いろいろな解空間のうち, 簡単かつ重要なものの一つは, ある点の近傍における正則関数の空間である．この空間での解については, 次の定理がなりたつ: 点 $x=c$ が, $a_r(x)=0$ の外にあるとき, $x=c$ の近傍で定義された正則関数解全体は, $\mathbf{C}$ 上の r 次元のベクトル空間である．このとき, 微分方程式を解くとは, この正則関数解の表示を求めることだとおもって良いであろう．この場合は巾級数を代入して係数を順に決めていけばよい．なお r を微分方程式の rank とよぶ.

$a_r(x)=0$ を満たす点を微分方程式の特異点という．上の常微分方程式の場合でも, 特異点のまわりでの解をもとめることは複雑な問題であり, 一応の解がもとまったのは, 20 世紀半ばのことである．なお現代の科学や工学では微分方程式を解くとは数値的に解くことを意味する場合も多いが, 数値的に解を計算するのも特異点のまわりではむつかしい.

この解説論文では, 直観的な言い方でいうと, n 変数で n 個の連立線形偏微分方程式系を特異点の周りで解くことを考える. ただし一般の特異点でなく, 無限遠にある確定特異点のまわりで考える.

微分方程式を解くための有効な一つの方法は摂動法である. 摂動法では, 簡単な微分方程式の解をもとにして, より複雑な微分方程式の解を構成する. ここで紹介するグレブナ変形の方法は摂動法の一種である.

1 確定特異点をもつ常微分方程式の級数解

確定特異点をもつ常微分方程式の解法をグレブナ変形の記号を使いながら復習しよう. このような解法は主に 19 世紀に研究された.

1 変数の微分作用素環

$$D = \mathbf{C}\langle x, \partial \rangle$$

を考える. ∂ は, x に付いての微分であり, $\partial x = x\partial + 1$ なる関係式を満たす. 多項式係数の微分作用素は $\frac{d}{dx}$ を ∂ と書き直すことにより, D の元とみなせる.

$\theta = x\partial$ とおく. 特異点の周りでの級数解を考えるには, θ で微分作用素を表示するのが基本的である. $x = 0$ の周りでの級数解を求める問題を $x = 0$ が確定特異点の場合に考えてみよう.

D での関係式

$$x^m \partial^m = \theta(\theta - 1) \cdots (\theta - m + 1)$$

に注意すれば, D の任意の元 ℓ は, 適当な x のべき x^v を左から掛けることにより, x と θ のみでつぎのように表現できる.

$$\begin{aligned} x^v \ell &= \sum_{i=0}^{N} x^i p_i(\theta) \\ &= p_0(\theta) + x p_1(\theta) + x^2 p_2(\theta) + \cdots \end{aligned}$$

ここで $p_i(\theta)$ は, θ の多項式である. 多項式 p_0 の次数が ℓ の rank に等しいとき微分方程式 $\ell f = 0$ は $x = 0$ を確定特異点 (Regular singularity) にもつという. このとき $x = 0$ のまわりの級数解は次のようにして計算できる.

定理 1 代数方程式 $p_0(s) = 0$ の根がすべて異なり, さらに根の差が整数でないと仮定する. ρ を $p_0(s) = 0$ の根として, 複素数列 c_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を次の漸化式

$$c_{k+N} p_0(\rho + k + N) + \sum_{i=1}^{N} c_{k+N-i} p_i(\rho + k + N - i) = 0, \quad c_0 = 1 \qquad (1)$$

で一意的にさだめることが可能である. このとき, $\ell f = 0$ が原点を確定特異点にもつならば, 関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}, \quad p_0(\rho) = 0 \tag{2}$$

は, 方程式 $\ell f = 0$ の原点の周りの解空間の基底となる.

証明は $p_i(\theta)x^{\rho+k} = p_i(\rho+k)x^{\rho+k}$ なる性質に注意すれば簡単にできる. この定理は古典的定理であるが, この定理をみると, 微分作用素 $p_0(\theta)$ が解の構成に中心的役割を果たすことがわかる. グレブナ変形の理論と結びつけるため, t をパラメータとして,

$$x \mapsto t^{-1}y, \quad \partial_x \mapsto t\partial_y \tag{3}$$

なる変数変換を考えよう. このとき $\theta_x = x\partial_x$ は t の値によらず, $\theta_y = y\partial_y$ に移る. θ この変換で不変であるといってもよい. 微分作用素 $x^v\ell$ にこの変換を施し, t の多項式として整理すると, t のべきが最大の項の係数が p_0 に他ならない. $f(x)$ を解とする. $f(yt^{-1})$ の t についての展開を考えよう. $t \to +\infty$ での解の主要部の満たす微分方程式が $p_0(\theta_y)$ である. したがって p_0 は t を大きくしていったときの, 方程式の主要部とみなしてもよい.

$\ell \in D$ に変数変換 (3) を施したときの, t のべきが最大の項の係数 $p_0(\theta)$ をグレブナ変形の理論では, $\mathrm{in}_{(-1,1)}(\ell)$ と書く (ただし y, ∂_y は x, ∂_x に戻す). またこれを ℓ の $(-1,1)$ 方向へのグレブナ変形とよぶ.

さて, $p_0(s) = 0$ に重根があるときは, 定理 1 で述べたような形の級数では解はかけない.

例:

$$\ell = \theta^2 - x(\theta + 1/2)^2$$

とおく. このとき $p_0(s) = s^2$ である. 根 $s = 0$ に対応する級数解は

$$f_1(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2^2}x^2 + \cdots$$

となる. もうひとつの解としては,

$$f_2(x) = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \cdots\right)\log x + \frac{1}{2}x + \cdots$$

なる解をとればいいことが知られている.

この解には $\log x$ が出現する. 一般に次の定理がなりたつ (これも 19 世紀からよく知られている).

定理 2 $\ell f = 0$ が $x = 0$ を確定特異点にもつとき,

$$N = \mathbf{C}[[x]][\log x, x^{\rho_1}, \ldots, x^{\rho_u}], \quad p_0(\rho_i) = 0, 1 \le i \le u$$

に *rank* 個の一次独立解が存在する.

解を構成する方法は, 教科書によく紹介されている Frobenius の方法のほかに次のような方法がある.

N のモノミアル $x^{\alpha}(\log x)^k$ に対して, 辞書式に, $\mathrm{Re}\,\alpha$ が小さいほど大きい, k は大きいほど大きい, $\mathrm{Im}\,\alpha$ が小さいほど大きい, として, モノミアルに順序をいれる. f を N の元とするとき, $\mathrm{in}(f)$ を f の中でこの順序で一番大きいモノミアルとする. このとき次の定理がなりたつ.

定理 3 $\ell f = 0$ が $x = 0$ を確定特異点にもつとき, 次の性質を満たす *rank* 個の一次独立解 $f_1, \ldots, f_r \in N$ が存在する. これらの解は原点の近傍で収束する.

1. $\mathrm{in}(f_i)$ は $\mathrm{in}_{(-1,1)}(\ell)$ の解.
2. f_j, $(j \neq i)$ には項 $\mathrm{in}(f_i)$ が出現しない.

この定理は, 解を構成していくためのアルゴリズムも与えている. つまり, まずグレブナ変形 $\mathrm{in}_{(-1,1)}(\ell)$ を解き, それからその解を延ばしていけば解を構成できることをこの定理は保証している.

この定理は n 変数の regular holonomic system に一般化可能である. 次の節では, その一般化を紹介しよう.

2 Holonomic system のグレブナ変形と級数解

以下 n 変数の微分作用素環

$$D = \mathbf{C}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$$

を考える. 線形偏微分方程式系

$$\ell_1 f = \cdots = \ell_m f = 0, \quad \ell_i \in D$$

を $\ell_1, \ldots, \ell_m$ で生成される D の左イデアル $I = D \cdot \{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ と同一視する.

前節で述べたことを一般化するために次の二つの記号を導入する.

$$\mathrm{ord}_{(u,v)}(x^{\alpha}\partial^{\beta}) = u \cdot \alpha + v \cdot \beta, \quad u, v \in \mathbf{R}^n, u + v \geq 0 \tag{4}$$

$\ell = \sum_{(\alpha,\beta)\in E} c_{\alpha,\beta} x^{\alpha}\partial^{\beta} \in D$ とおくとき,

$$\mathrm{in}_{(u,v)}(\ell) = \sum_{\mathrm{ord}_{(u,v)}(\ell) = u\alpha + v\beta,\ (\alpha,\beta)\in E} c_{\alpha,\beta} x^{\alpha} \xi^{\beta} \tag{5}$$

ただし, $u + v = 0$ のときは $\xi = \partial$ とおく. これは 1 変数の時の同様の記号の一般化となっている.

偏微分方程式系 I が, holonomic であるとは, $\mathrm{in}_{(0,1)}(I)$ の次元が n であることと定義する. 左 D 加群 D/I の任意の滑らかな曲線への制限 (高次の制限も含む) で得られる常微分方程式系がその曲線の無限遠点をふくむすべての点で確定特異点をもつとき, D/I を regular holonomic とよぶことにする. Regular holonomic の概念は, Deligne, Kashiwara, Kawai や Mebkhout などにより 1970 年代から 1980 年代の初めにかけて整備された. D 加群の制限の概念は, D 加群の理論の発達のはじめのころからあったが, その計算法は Oaku [4] により 1990 年代の半ばにあたえられて, D 加群の計算方法の基礎となった. このあたりの事情については, Oaku による入門書 [5] がわかりやすくかつ含蓄に富んでいる.

さてわれわれは, 定理 3 の類似およびそれを元にした級数解を求めるアルゴリズムを得たい. そのためには, グレブナ変形 $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ を計算しないといけない.

定理 4 (Oaku 1993, Takayama 1994) 重み $w \in \mathbf{R}^n$ を一つえらび固定する. I の順序 $\prec_{(-w,w)}$ によるグレブナ基底を G とするとき $\mathrm{in}_{(-w,w)}(G)$ がグレブナ変形 $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ の生成元となっている. $\prec_{(-w,w)}$ によるグレブナ基底 G は, D における同次化の方法 (*V-homogenization* か 同次化ワイル代数) を *Buchberger* アルゴリズムに適用して計算できる.

さて, 重み w を generic に選び固定する. $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I) = \mathrm{in}_{(-w',w')}(I)$ となる w' 全体は R^n の cone となることが知られている. この cone を C_w と書き, グレブナ cone とよぶ. さらにグレブナ変形で得られる方程式系 $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ は実は $\theta_1, \ldots, \theta_n$ のみだけで書ける方程式系に書き直せる. つまり, θ_i のみだけで書ける方程式系 $p_1(\theta), \ldots, p_L(\theta)$ が存在して, 二つの方程式系の正則関数解の空間が一致するように作れる. 代数方程式系 $p_1(s) = \cdots = p_L(s) = 0$ の解を $\rho_1, \cdots, \rho_m$ とおく. 空間

$$N_w = \mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n \cap C_w^*]][x^{\rho_1}, \ldots, x^{\rho_m}, \log x_1, \ldots, \log x_n]$$

が解を考えるべき空間である. 次の定理は定理 3 の一般化である.

定理 5 (Saito, Sturmfels, Takayama, 2000, [8, Chapter 2]) D/I が *regular holonomic* であるとき, N_w に次の性質をみたす I の *rank* 個の一次独立解が存在する. これらの解は, 共通のある領域で収束する.

1. $\mathrm{in}(f_i)$ は $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ の解.

2. f_j, $(j \neq i)$ には項 $\mathrm{in}(f_i)$ が出現しない.

この定理は, 解を構成していくためのアルゴリズムも与えている. 手順は以下のとおり.

1. グレブナ変形が簡単に解ける方程式系になるように generic な重みを選らぶ.

2. グレブナ変形の方程式を解く.

3. グレブナ変形から, 元の方程式の解を復元する.

摂動論の枠組みではグレブナ変形の方程式の解は第一近似だと思ってよい. この定理の抽象的な類似が Kashiwara による消滅サイクルの研究 (1980 年代) でも現れていることも注意しておく.

例: a, b, b' を数とする.

$$\begin{aligned} &\theta_x^2 - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + b), \\ &\theta_y^2 - y(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_y + b') \end{aligned}$$

の解は, $xy(1-x)(1-y)(1-x-y) = 0$ 以外で正則である. 解空間の次元は 4 次元であり $w = (1,1)$ のときグレブナ cone C_w は, 第一象元に等しい. グレブナ変形の方程式は $D \cdot \{\theta_x^2, \theta_y^2\}$. 次の級数が解の基底.

$$\begin{aligned} f_1 &= \underline{1} + \cdots \\ f_2 &= \underline{\log x} + \cdots \\ f_3 &= \underline{\log y} + \cdots \\ f_4 &= \underline{\log x \log y} \left(1 + \frac{ab}{1^2} x + \frac{ab'}{1^2} y + \cdots\right) \\ &\quad + (\log y) x (ab - 2a - 2b) + (\log x) y (ab' - 2a - 2b') + \cdots \end{aligned}$$

下線の項が $\mathrm{in}(f_i)$ である.

Regular holonomic 系の特異点のまわりでの級数解を与える問題の解としては, 1970 年代おわりから 80 年代の始めにかけて Oshima [7] および Yoshida, Takano [12] が常微分方程式の局所的な標準形への変換方法の拡張としてひとつの解を与えている. この方法では, 特異点が正規交差となっていることを仮定していた. われわれの方法は, これらの方法とは異なり無限遠点での特異点解消と級数解を同時に構成している.

3 ホモトピー法, ソフトウエア, 課題

この節では, 代数方程式系の解法との類似およびソフトウエアおよび今後の課題について述べる.

われわれの方法は, I の解と $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ の解を関連付けていると理解してよい. この場合, $\mathrm{in}_{(-w,w)}(I)$ は I の性質を保ったよいグレブナ変形である. 連立代数方程式も同様な手順で解を求めることが可能である. Newton 法は

代数方程式を解くための強力な方法であるが, 初期値をえらぶ万能でうまい方法はなかった. 1995 年頃から盛んに研究されている Cheater's homotopy [9], [11] による手順は以下のようになる.

1. グレブナ変形が 2 項式を生成元とするようなうまい重みを選らぶ.
2. グレブナ変形の方程式を解く.
3. グレブナ変形にそって, 元の方程式の解を Newton 法を併用して復元する.

代数方程式系の解法と微分方程式系の解法は似ているが, 実は代数方程式の解の公式は, A 超幾何方程式系の解になっていることも知られており, さらに深い関係があるものと推測している.

不確定特異点の周りでの, 級数解の構成問題は, 常微分方程式でも完全な解決は, 20 世紀にはいってからである. Hukuhara [1] や Turrittin [10] の仕事を参照. また M.Hoej が書いた Maple の DEtool を用いると計算機を用いて級数解を構成できる. Holonomic 系に対しては, Majima [2] が特異点が正規交差であると仮定して, 解の構成アルゴリズムを与えた. グレブナ変形による類似の理論とアルゴリズムはまだできていない.

この解説でのべたアルゴリズムは OpenXM パッケージの一部 [6, dsolv 関数] (`OpenXM/src/asir-contrib`) として実現されている. われわれの級数解構成のアルゴリズムは, 幾何や代数のさまざまなアルゴリズムを利用する必要があり, OpenXM のソフトウエア間通信機能をフルに利用している.

この解説では, 級数解の構成を紹介した. 線形偏微分方程式系を扱ういわゆる D 加群の理論は高度に抽象的なものと思われてきた. しかし, グレブナ基底やグレブナ変形の考えをもちいると, 線形偏微分方程式系を扱うための計算機アルゴリズムと深いかかわりをもっことが明らかになってきている. たとえば, 普通のおよび高次の解空間 $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ をきめるためのアルゴリズムがさまざまな解空間 $\mathcal{N}$ に対してあたえられつつある.

線形偏微分方程式系のための計算機向けアルゴリズムと実装は, このように実際の解法に適用できるだけでなく, 数学者の計算機実験装置として理論研究にも寄与するものと期待している. 実際 A 超幾何方程式系の研究 [8] には, D 加群用のアルゴリズムとシステムが予想の検証や反例を構成するためフルに活用された.

参考文献

[1] M.Hukuhara, Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles Linéaires, III, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu Imperial University, Ser. A, Vol.2 (1941), 125–137.

[2] 真島, 不確定特異点の近傍での解の表現, 数理研講究録 **431** (1981), 192–206.

[3] H.Majima, *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*. Springer Lecture Notes in Mathematics, **1075**, 1984.

[4] T.Oaku, Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules. Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 61–105.

[5] 大阿久, D 加群と計算数学, 朝倉書店, 2002.

[6] http://www.openxm.org

[7] T.Oshima, A definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities. Publication of Research Institute of Mathematical Sciences, **19** (1983), 1203–1230.

[8] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Algorithms and Computation in Mathematics **6**, Springer, 2000.

[9] B.Sturmfels, Polynomial Equations and Convex Polytopes, The American Mathematical Monthly **105** (1998), no. 10, 907–922.

[10] H.L.Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Mathematica, **93** (1955), 27–66.

[11] J.Verschelde, http://www.math.uic.edu/~jan/

[12] M.Yoshida and K.Takano, On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points, Funkcial Ekvacioj **19** (1976), 175–189.